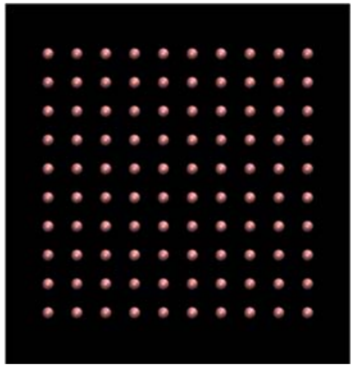
Αγωγιμότητα στα μέταλλα

Δ. Γ. Παπαγεωργίου
Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

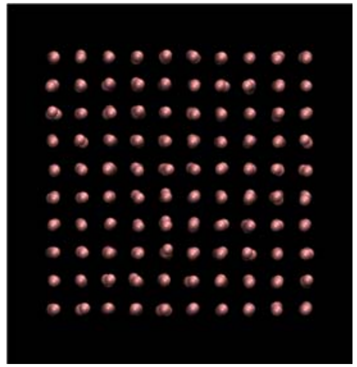
dpapageo@cc.uoi.gr
http://pc164.materials.uoi.gr/dpapageo

Η κίνηση των ατόμων σε κρυσταλλικό στερεό

Θερμοκρασία $T = 0$

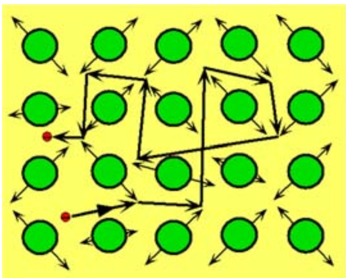


Θερμοκρασία $T > 0$



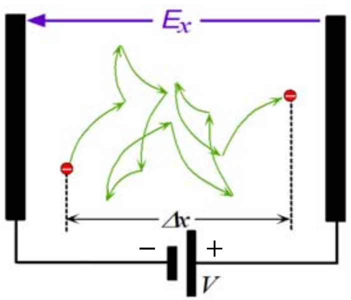
Η κίνηση των ηλεκτρονίων στα μέταλλα

Χωρίς ηλεκτρικό πεδίο



Τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων και σκέδαση από τα δονούμενα μεταλλικά ιόντα.

Με ηλεκτρικό πεδίο



Μετά από πολλές σκεδάσεις το ηλεκτρόνιο έχει μετατοπιστεί κατά Δx από την αρχική του θέση.

Υπάρχει συνολική **ολίσθηση** στην διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

Το μοντέλο Drude

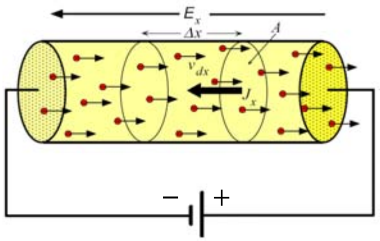
Παραδοχές

1. Μεταξύ των σκεδάσεων **αγνοείται** η αλληλεπίδραση του ηλεκτρονίου με:
   a. <u>τα άλλα ηλεκτρόνια</u> (προσέγγιση ανεξάρτητου ηλεκτρονίου – καλή προσέγγιση)
   b. <u>τα ιόντα</u> (προσέγγιση ελεύθερου ηλεκτρονίου – όχι καλή προσέγγιση)

   Υπό την επίδραση εξωτερικού πεδίου τα ηλεκτρόνια κινούνται σαν κλασσικά σωματίδια.
2. Οι σκεδάσεις ηλεκτρονίων – ιόντων είναι **στιγμιαίες** και αλλάζουν **ασυνεχώς** την ταχύτητα των ηλεκτρονίων. Δεν υπάρχουν συγκρούσεις ηλεκτρονίων μεταξύ τους.
3. Τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με ιόντα με πιθανότητα $1/\tau$ στη μονάδα του χρόνου. Η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από τη θέση ή την ταχύτητα του ηλεκτρονίου (καλή προσέγγιση).
4. Τα ηλεκτρόνια έρχονται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον τους μόνο μέσω των σκεδάσεων.

Paul Drude 1863-1906

Το μοντέλο Drude



Δύναμη λόγω ηλεκτρικού πεδίου

$$E_x = \frac{F}{q} \Rightarrow F = -eE_x$$

Ταχύτητα ολίσθησης

Η μέση ταχύτητα όλων των ηλεκτρονίων στη διεύθυνση x

$$v_{dx} = \frac{1}{N}(v_{x1} + v_{x2} + \cdots + v_{xN})$$

Συγκέντρωση ηλεκτρονίων

$$n = \frac{\text{πλήθος ηλεκτρονίων}}{\text{όγκος}} = \frac{N}{V}$$

Σε χρόνο Δt τα ηλεκτρόνια ολισθαίνουν κατά

$$\Delta x = v_{dx}\Delta t$$

Το αντίστοιχο φορτίο που διέρχεται από τη διατομή A είναι:

$$\Delta q = eN \Rightarrow$$

$$\Delta q = enV \Rightarrow$$

$$\Delta q = enA\Delta x \Rightarrow$$

$$\Delta q = enAv_{dx}\Delta t$$

Το μοντέλο Drude

Πυκνότητα ρεύματος

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow$$

$$J = \frac{\frac{\Delta q}{\Delta t}}{A} = \frac{\Delta q}{A\Delta t} \Rightarrow$$

$$J = \frac{enAv_{dx}\Delta t}{A\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{J = env_{dx}}$$

Το μοντέλο Drude

Αμέσως μετά τη σκέδαση το ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα u_x

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο ηλεκτρόνιο λόγω του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$E_x = \frac{F}{e} \Rightarrow F = eE_x \qquad (1)$$

Επίσης, για κλασσικά σωματίδια

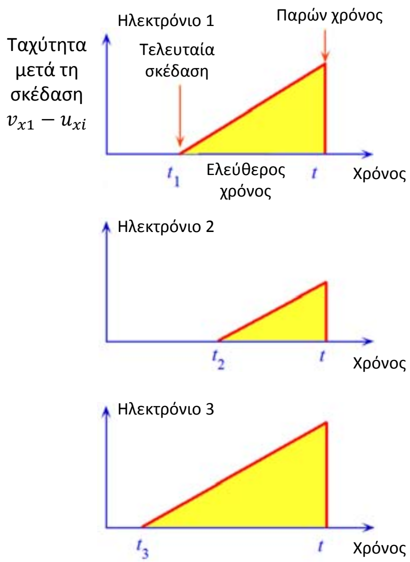
$$F = m_e a \qquad \text{Νόμος Νεύτωνα} \qquad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow eE_x = m_e a \Rightarrow a = \frac{eE_x}{m_e}$$

Εφαρμόζουμε την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$$v_{xi} = u_{xi} + a(t - t_i) \Rightarrow$$

$$v_{xi} = u_{xi} + \frac{eE_x}{m_e}(t - t_i)$$



Το μοντέλο Drude

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι:

$$v_{dx} = \frac{1}{N}(v_{x1} + v_{x2} + \cdots + v_{xN}) =$$

$$\frac{1}{N}\left(u_{x1} + \frac{eE}{m_e}(t - t_1) + u_{x2} + \frac{eE}{m_e}(t - t_2) + \cdots + u_{xN} + \frac{eE}{m_e}(t - t_N)\right) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{N}(u_{x1} + u_{x2} + \cdots + u_{xN})} + \frac{1}{N}\left(\frac{eE}{m_e}(t - t_1) + \frac{eE}{m_e}(t - t_2) + \cdots + \frac{eE}{m_e}(t - t_N)\right)$$

Μέση τιμή των ταχυτήτων μετά τη σκέδαση.
Είναι μηδέν γιατί οι σκεδάσεις γίνονται τυχαία.

$$v_{dx} = \frac{eE}{m_e}\frac{1}{N}\left((t - t_1) + (t - t_2) + \cdots + (t - t_N)\right) \Rightarrow$$

$$v_{dx} = \frac{eE_x}{m_e}\overline{(t - t_i)} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{dx} = \frac{e\tau}{m_e}E_x}$$

$\tau = \overline{(t - t_i)}$ Μέσος ελεύθερος χρόνος

$1/\tau$ είναι η **πιθανότητα σκέδασης** στη μονάδα του χρόνου

Το μοντέλο Drude

Η ταχύτητα ολίσθησης γράφεται:

$$v_{dx} = \mu_e E_x$$

Ευκινησία ή κινητικότητα ολίσθησης

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_e}$$

Δείχνει πόσο γρήγορα ολισθαίνουν τα ηλεκτρόνια υπό την επίδραση ενός εφαρμοζόμενου πεδίου.

Μονάδες (SI)

$$\frac{m^2}{V\,s}$$

Βρήκαμε ότι

$$J = env_{dx} \Rightarrow J = en\mu_e E_x$$

Μπορούμε να τη γράψουμε ως

$$\boxed{J = \sigma E_x}$$

Νόμος του Ohm

όπου

$$\boxed{\sigma = en\mu_e}$$

Μονοπολική ειδική αγωγιμότητα

Επειδή

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{en\mu_e} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{m_e}{n\tau e^2}}$$

Ειδική αντίσταση

Εφαρμόζοντας το μοντέλο Drude βρήκαμε την ειδική αντίσταση και ειδική αγωγιμότητα.

Παράδειγμα #1

a. Υπολογίστε την ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων σε κρύσταλλο Ge σε θερμοκρασία δωματίου όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι 1000V/m.
b. Πόσο χρόνο χρειάζεται ένα ηλεκτρόνιο να διασχίσει ένα κρύσταλλο Ge μήκους 25mm ;

Δεδομένα:

$$E_x = 1000\frac{V}{m}$$

$$\Delta x = 25mm = 0.025m$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$v_{dx} = \mu_e E_x$$

Χρειαζόμαστε το μ_e

Υλικό	Χάσμα (eV)	Ευκινησία ηλεκτρονίων (m^2/Vs)
Ge	0.67	0.39
Si	1.11	0.145

Αντικαθιστούμε:

$$v_{dx} = \left(0.39\frac{m^2}{Vs}\right)\left(1000\frac{V}{m}\right) =$$

$$390\frac{m}{s}$$

Παράδειγμα #1

b. Πόσο χρόνο χρειάζεται ένα ηλεκτρόνιο να διασχίσει ένα κρύσταλλο Ge μήκους 25mm ;

$$v_{dx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{dx}} =$$

$$\frac{0.025m}{390\frac{m}{s}} =$$

$$6.4 \times 10^{-5}s =$$

$$64\mu s$$

Παράδειγμα #2

Η πυκνότητα του αργύρου είναι 10.49 gr/cm³ και η ατομική του μάζα 107.87 gr/mol. Ποια είναι η συγκέντρωση ατόμων;

Δεδομένα:

$$d = 10.49\frac{gr}{cm^3}$$

$$M_{at} = 107.87\frac{gr}{mol}$$

Η συγκέντρωση ατόμων ορίζεται:

$$n_{Ag} = \frac{\text{πλήθος ατόμων}}{\text{όγκος}} = \frac{N_{Ag}}{V}$$

Για μια δεδομένη μάζα m αργύρου έχουμε $\frac{m}{M_{at}}$ mol

Κάθε mol έχει N_A άτομα.

Συνεπώς τα άτομα Ag είναι

$$N_{Ag} = \frac{m}{M_{at}}N_A$$

Επειδή $m = Vd$

$$N_{Ag} = \frac{Vd}{M_{at}}N_A$$

Τελικά η συγκέντρωση ατόμων είναι:

$$n_{Ag} = \frac{\frac{Vd}{M_{at}}N_A}{V} \Rightarrow$$

$$n_{Ag} = \frac{d\,N_A}{M_{at}}$$

Παράδειγμα #2

Χρειαζόμαστε:

$N_A = 6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

Αντικαθιστούμε:

$$n_{Ag} = \frac{d\ N_A}{M_{at}} =$$

$$\frac{\left(10.49 \frac{gr}{cm^3}\right)(6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1})}{107.87 \frac{gr}{mol}} =$$

$5.86 \times 10^{22}\ cm^{-3}$

Παράδειγμα #3

Η ηλεκτρική ειδική αγωγιμότητα του χαλκού είναι $6x10^7(\Omega\ m)^{-1}$ η ευκινησία των ηλεκτρονίων $0.003m^2/V\ s$ και η πυκνότητά του $8.9\ gr/cm^3$.

a. Υπολογίστε τον αριθμό των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά κυβικό μέτρο.

b. Ποιος είναι ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά άτομο χαλκού ;

Δεδομένα:

$\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\ m)^{-1}$

$\mu_e = 0.003 \frac{m^2}{V\ s}$

$d = 8.9 \frac{gr}{cm^3}$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\sigma = en\mu_e \Rightarrow$$

$$n = \frac{\sigma}{e\mu_e}$$

Χρειαζόμαστε:

$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

Αντικαθιστούμε:

$$n = \frac{6 \times 10^7 (\Omega\ m)^{-1}}{(1.6 \times 10^{-19} C)\left(0.003 \frac{m^2}{V\ s}\right)} =$$

$$1250 \times 10^{26} \frac{(\Omega\ m)^{-1}}{C \frac{m^2}{V\ s}} =$$

$1.25 \times 10^{29} m^{-3}$

Παράδειγμα #3

b. Ποιος είναι ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά άτομο χαλκού ;

Πρέπει να βρούμε πόσα άτομα χαλκού υπάρχουν ανά μονάδα όγκου, δηλαδή πρέπει να βρούμε την συγκέντρωση ατόμων

$$n_{Cu} = \frac{\text{πλήθος ατόμων}}{\text{όγκος}} = \frac{N_{Cu}}{V}$$

Βρήκαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι η συγκέντρωση ατόμων δίνεται από:

$$n_{Cu} = \frac{d}{M_{at}} N_A$$

Χρειαζόμαστε:

$N_A = 6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

$M_{at} = 63.55\ gr/mol$

Αντικαθιστούμε:

$$n_{Cu} =$$

$$\frac{8.9 \frac{gr}{cm^3}}{63.55 \frac{gr}{mol}} (6.022 \times 10^{23} mol^{-1}) =$$

$$8.43 \times 10^{22} cm^{-3} =$$

$$8.43 \times 10^{28} m^{-3}$$

Υπενθύμιση:

$1cm^{-3} = 10^6 m^{-3}$

Παράδειγμα #3

Βρήκαμε ότι ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου (συγκέντρωση ηλεκτρονίων) είναι:

$$n = 1.25 \times 10^{29} m^{-3}$$

Επίσης βρήκαμε ότι ο αριθμός ατόμων Cu ανά μονάδα όγκου (συγκέντρωση ατόμων) είναι:

$$n_{Cu} = 8.43 \times 10^{28} m^{-3}$$

Συνεπώς ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά άτομο Cu είναι:

$$r = \frac{n}{n_{Cu}} =$$

$$\frac{1.25 \times 10^{29} m^{-3}}{8.43 \times 10^{28} m^{-3}} =$$

1.48

Παράδειγμα #4

a. Υπολογίστε την συγκέντρωση των ελεύθερων ηλεκτρονίων για το χρυσό υποθέτοντας ότι υπάρχουν 1.5 ελεύθερα ηλεκτρόνια ανά άτομο χρυσού. Η ειδική αγωγιμότητα είναι 4.3×10^7 $(\Omega\ m)^{-1}$ και η πυκνότητα 19.32 gr/cm^3.
b. Ποια είναι η ευκινησία των ηλεκτρονίων στον χρυσό;

Δεδομένα:

$r = 1.5$ ηλεκτρόνια/άτομο

$\sigma = 4.3 \times 10^7\ (\Omega\, m)^{-1}$

$d = 19.32\ gr/cm^3$

Έχουμε ήδη βρεί στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$n_{Au} = \frac{d}{M_{at}} N_A$$

Το πλήθος ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά άτομο είναι:

$$r = \frac{n}{n_{Au}} = \frac{n}{\frac{d}{M_{at}} N_A} = \frac{n\, M_{at}}{d\, N_A} \Rightarrow$$

$$n = \frac{r\, d\, N_A}{M_{at}}$$

Παράδειγμα #4

Χρειαζόμαστε

$N_A = 6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

$M_{at} = 196.97\ gr/mol$

Αντικαθιστούμε:

$$n = \frac{r\, d\, N_A}{M_{at}} =$$

$$\frac{1.5\left(19.32\,\frac{gr}{cm^3}\right)(6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1})}{196.97\,\frac{gr}{mol}} =$$

$8.86 \times 10^{22} cm^{-3} =$

$8.86 \times 10^{28} m^{-3}$

Παράδειγμα #4

b. Ποια είναι η ευκινησία των ηλεκτρονίων στον χρυσό;

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\sigma = en\mu_e \Rightarrow$$

$$\mu_e = \frac{\sigma}{en}$$

Χρειαζόμαστε:

$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

Αντικαθιστούμε:

$$\mu_e = \frac{4.3 \times 10^7 (\Omega\, m)^{-1}}{(1.6 \times 10^{-19} C)(8.86 \times 10^{28} m^{-3})} =$$

$$3.03 \times 10^{-3} \frac{m^2}{V\, s}$$

Παράδειγμα #5

Η κινητικότητα των ηλεκτρονίων στον άργυρο είναι 56 cm^2/V s. Ποιος είναι ο μέσος ελεύθερος χρόνος μεταξύ σκεδάσεων ;

Δεδομένα:

$$\mu_e = 56\frac{cm^2}{Vs} = 0.0056\frac{m^2}{Vs}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_e} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\mu_e m_e}{e}$$

Χρειαζόμαστε:

$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

$m_e = 9.11 \times 10^{-31} Kg$

Αντικαθιστούμε:

$$\tau = \frac{\left(0.0056\,\frac{m^2}{Vs}\right)(9.11 \times 10^{-31} Kg)}{1.6 \times 10^{-19} C} =$$

$3.2 \times 10^{-14}\ s$

Υπενθύμιση: Μονάδες

$J = AVs = \frac{C}{s} Vs = CV$ Ηλεκτρική ενέργεια

$J = Nm = Kg\frac{m}{s^2} m = Kg\frac{m^2}{s^2}$ Μηχανική ενέργεια

Παράδειγμα #6

Σε ένα μέταλλο ο μέσος ελεύθερος χρόνος μεταξύ σκεδάσεων είναι 25 fs. Ποια είναι η πιθανότητα σκέδασης;

Δεδομένα:

$\tau = 25\, fs = 25 \times 10^{-15} s$

Η πιθανότητα σκέδασης είναι:

$\frac{1}{\tau} =$

$\frac{1}{25 \times 10^{-15} s} =$

$4 \times 10^{13}\ s^{-1}$

Συμβαίνουν 4×10^{13} σκεδάσεις ανά δευτερόλεπτο

Παράδειγμα #7

Η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο χαλκό είναι 10^6 m/s, η ειδική του αγωγιμότητα $6x10^7$ $(\Omega\ m)^{-1}$ και η ευκινησία (κινητικότητα) των ηλεκτρονίων 43.4 cm^2/V s.

a. Ποιο ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να εφαρμόσουμε έτσι ώστε η ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων να είναι ίση με το 1‰ της μέσης ταχύτητάς τους ;
b. Ποια είναι η αντίστοιχη πυκνότητα ρεύματος που προκύπτει;
c. Ποιο είναι το ρεύμα αν ο αγωγός έχει διάμετρο 1mm ;
d. Πόση είναι η ηλεκτρική ισχύς που θα καταναλωθεί αν ο αγωγός έχει μήκος 100m ;

Δεδομένα:

$u = 10^6 \frac{m}{s}$

$\sigma = 6 \times 10^7\ (\Omega\, m)^{-1}$

$\mu_e = 43.4 \frac{cm^2}{Vs} = 0.00434 \frac{m^2}{Vs}$

$d = 1mm = 0.001m$

$l = 100\, m$

Παράδειγμα #7

a. Ποιο ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να εφαρμόσουμε έτσι ώστε η ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων να είναι ίση με το 1‰ της μέσης ταχύτητάς τους ;

Θα εφαρμόσουμε τη σχέση:

$$v_{dx} = \mu_e E_x \Rightarrow$$
$$E_x = \frac{v_{dx}}{\mu_e}$$

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι:

$v_{dx} = \frac{1}{1000} u =$

$\frac{1}{1000} 10^6 \frac{m}{s} =$

$10^3 \frac{m}{s}$

Αντικαθιστούμε:

$E_x = \frac{10^3 \frac{m}{s}}{0.00434 \frac{m^2}{Vs}} =$

$230 \times 10^3 \frac{V}{m} =$

$230 \frac{kV}{m}$

Παράδειγμα #7

b. Ποια είναι η αντίστοιχη πυκνότητα ρεύματος που προκύπτει;

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$J = \sigma E_x$$

Αντικαθιστούμε:

$J = (6 \times 10^7\ (\Omega\, m)^{-1}) \left(230 \times 10^3 \frac{V}{m}\right) =$

$1.38 \times 10^{13} \frac{A}{m^2}$

Παράδειγμα #7

c. Ποιο είναι το ρεύμα αν ο αγωγός έχει διάμετρο 1mm ;

Ο ορισμός της πυκνότητας ρεύματος είναι:

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow$$

$$I = JA$$

Η διατομή είναι:

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 =$$

$$\pi\left(\frac{0.001m}{2}\right)^2 =$$

$$7.85 \times 10^{-7} m^2$$

Αντικαθιστούμε:

$$I =$$

$$\left(1.38 \times 10^{13}\,\frac{A}{m^2}\right)(7.85 \times 10^{-7} m^2) =$$

$$1.1 \times 10^7 A$$

Το ρεύμα είναι εξαιρετικά μεγάλο για τόσο μικρό αγωγό.
Ακόμη και μια πολύ μικρή ταχύτητα ολίσθησης

$$v_{dx} \ll u$$

δίνει μεγάλο ρεύμα.

Παράδειγμα #7

d. Πόση είναι η ηλεκτρική ισχύς που θα καταναλωθεί αν ο αγωγός έχει μήκος 100m ;

Η ηλεκτρική ισχύς δίνεται από:

$$P = VI$$

Επειδή ξέρουμε ότι:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow$$

$$V = IR$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση για την ισχύ:

$$P = I^2 R$$

Πρέπει να βρούμε την αντίσταση του αγωγού:

$$R = \rho\frac{l}{A} =$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} =$$

$$\frac{1}{6 \times 10^7\,(\Omega\,m)^{-1}}\,\frac{100m}{7.85 \times 10^{-7} m^2} =$$

$$2.12\,\Omega$$

Αντικαθιστούμε για την ισχύ:

$$P = (1.1 \times 10^7 A)^2 (2.12\Omega) =$$

$$2.57 \times 10^{14}\,W =$$

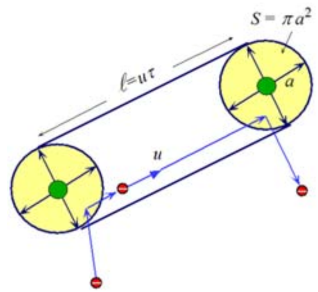
$257\,GW$!!!!!!!!!

Παράδειγμα #7

Συμπληρωματικό ερώτημα:

Ποια είναι η τάση που πρέπει να εφαρμόσουμε στα άκρα του αγωγού ; (με δύο τρόπους)

Θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης



Είδαμε ότι η αγωγιμότητα δίνεται από:

$$\sigma = en\mu_e \qquad \mu_e = \frac{e\tau}{m_e}$$

Όταν έχουμε σκέδαση λόγω θερμικών ταλαντώσεων συμβολίζουμε: σ_T, ρ_T

Συγκέντρωση κέντρων σκέδασης

$$N_s = \frac{\text{πλήθος κέντρων σκέδασης}}{\text{όγκος}} =$$

$=$ συγκέντρωση ατόμων (καθαρός κρύσταλος)

Στον όγκο Sl υπάρχει ένα κέντρο σκέδασης, οπότε

$$N_s = \frac{1}{Sl}$$

Εάν το ηλεκτρόνιο κινείται με μέση ταχύτητα v, τότε $l = v\tau$

$$N_s = \frac{1}{Sv\tau} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{SvN_s}$$

Θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης

Βρήκαμε ότι:

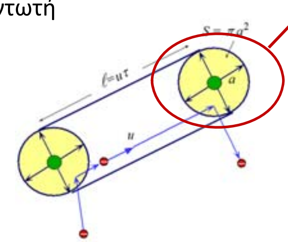
$$\tau = \frac{1}{S v N_s}$$

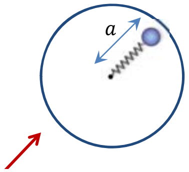
v: Πολύ μικρή εξάρτηση από τη θερμοκρασία.

S: Εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

$$\tau \propto \frac{1}{S} = \frac{1}{\pi a^2}$$

Θεωρούμε το άτομο σαν αρμονικό ταλαντωτή





Η μέση κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{4} M a^2 \omega^2$$

ω συχνότητα ταλάντωσης

Από την κινητική θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$K = \frac{1}{4} M a^2 \omega^2 \approx \frac{1}{2} k_B T$$

Δηλαδή $a^2 \propto T$

Θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης

$$\tau \propto \frac{1}{\pi a^2} \propto \frac{1}{T}$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\tau = \frac{C}{T}$$

C Σταθερά που δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

Συνεπώς

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_e} = \frac{eC}{m_e T}$$

Η ειδική αντίσταση είναι:

$$\rho_T = \frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{en\mu_e} \Rightarrow$$

$$\rho_T = \frac{m_e T}{e^2 n C}$$

$$\boxed{\rho_T = AT}$$

Θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης σε καθαρά μέταλλα

A Σταθερά που δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

Παράδειγμα #8

Ποια είναι η ποσοστιαία μεταβολή της ειδικής αντίστασης ενός σύρματος από καθαρό μέταλλο που βρίσκεται στη βόρεια Σιβηρία ανάμεσα στο καλοκαίρι (T_κ=20^{o}C) και το χειμώνα (T_χ=-30^{o}C); (Αγνοήστε τη μεταβολή στις διαστάσεις του σύρματος)

Δεδομένα:

$T_\kappa = 20^o C = (20 + 273)K = 293K$

$T_\chi = -30^o C = (-30 + 273)K = 243K$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\rho_T = AT$$

Η ποσοστιαία μεταβολή της ειδικής αντίστασης είναι

$$\frac{\rho_\kappa - \rho_\chi}{\rho_\kappa} =$$

$$\frac{AT_\kappa - AT_\chi}{AT_\kappa} =$$

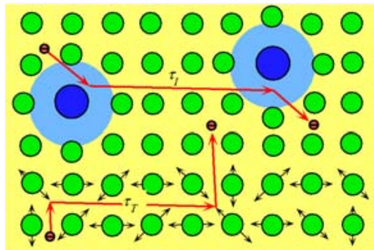
$$\frac{T_\kappa - T_\chi}{T_\kappa} =$$

$$\frac{293K - 243K}{293K} =$$

$0.171 =$

17.1%

Κανόνας του Matthiessen



Στην περίπτωση κραμάτων έχουμε σκέδαση από δύο τύπους ατόμων:

τ_T σκέδαση από θερμικές ταλαντώσεις του πλέγματος.

τ_I σκέδαση λόγω προσμίξεων.

Οι λόγοι $1/\tau_T$ και $1/\tau_I$ αντιπροσωπεύουν πιθανότητες σκέδασης συνεπώς η ολική πιθανότητα είναι (ανεξάρτητα γεγονότα σκέδασης)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_I}$$

Η κινητικότητα των ηλεκτρονίων είναι:

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_e} \Rightarrow \frac{1}{\mu_e}\frac{e}{m_e} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mu_e}\frac{e}{m_e} = \frac{1}{\mu_L}\frac{e}{m_e} + \frac{1}{\mu_I}\frac{e}{m_e} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_I}$$

Κανόνας του Matthiessen

Ειδική αντίσταση:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{en\mu_e} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{en\mu_L} + \frac{1}{en\mu_I} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \rho_T + \rho_I}$$

Κανόνας του Matthiessen

Άθροιση των ειδικών αντιστάσεων που προκύπτουν από διαφορετικούς μηχανισμούς σκέδασης.

Επιπλέον μπορεί να έχουμε σκέδαση των ηλεκτρονίων λόγω προσμίξεων, ένθετων ατόμων, πλεγματικών κενών, παραμορφώσεων και άλλων κρυσταλλικών ατελειών.

$$\rho = \rho_T + \rho_R$$

Κανόνας του Matthiessen

ρ_R Παραμένουσα ειδική αντίσταση. Εξαρτάται ελάχιστα από τη θερμοκρασία.

$$\rho = AT + B$$

A, B Σταθερές που εξαρτώνται από το υλικό.

Θερμοκρασιακός συντελεστής ειδικής αντίστασης

Στην πράξη δεν χρησιμοποιούμε τη σχέση $\rho = AT + B$ για να δώσουμε την ειδική αντίσταση.

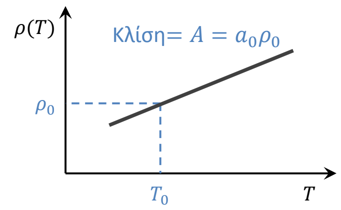
Θερμοκρασιακός συντελεστής ειδικής αντίστασης

Επιλέγουμε μια θερμοκρασία αναφοράς T_0.
Συνήθως $T_0 = 273K\ (0^o C)$ ή $T_0 = 293K\ (20^o C)$

Ορίζουμε:

$$a_0 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\delta\rho}{\delta T}\right)_{T=T_0}$$

ρ_0 ειδική αντίσταση στη θερμοκρασία αναφοράς.



Επειδή $\frac{\delta\rho}{\delta T} = A \Rightarrow a_0 =$ σταθερό (ανεξάρτητο της θερμοκρασίας).

Ο συντελεστής a_0 γράφεται:

$$a_0 = \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \rho_0[1 + a_0(T - T_0)]}$$

Θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης

Ειδική αντίσταση των καθαρών μετάλλων

Σε καθαρό μέταλλο

$$\rho = AT$$

Ο θερμοκρασιακός συντελεστής γράφεται:

$$a_0 = \frac{1}{\rho_0}\frac{\delta\rho}{\delta T} = \frac{1}{\rho_0}A \Rightarrow$$

$$\rho_0 = \frac{A}{a_0}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση για την ειδική αντίσταση:

$$\rho = \rho_0[1 + a_0(T - T_0)] \Rightarrow$$

$$AT = \frac{A}{a_0}[1 + a_0(T - T_0)] \Rightarrow$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}}$$

Αντικαθιστούμε το a_0 στον τύπο που δίνει τη θερμοκρασιακή εξάρτηση:

$$\rho = \rho_0[1 + a_0(T - T_0)] \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_0\left[1 + \frac{1}{T_0}(T - T_0)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \rho_0\frac{T}{T_0}}$$

Ειδική αντίσταση ιδανικών μετάλλων

Δεν ακολουθούν όλα τα μέταλλα την ανωτέρω σχέση. Στην πράξη χρησιμοποιείται η εμπειρική σχέση:

$$\boxed{\rho = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^n}$$

Ειδική αντίσταση μετάλλων

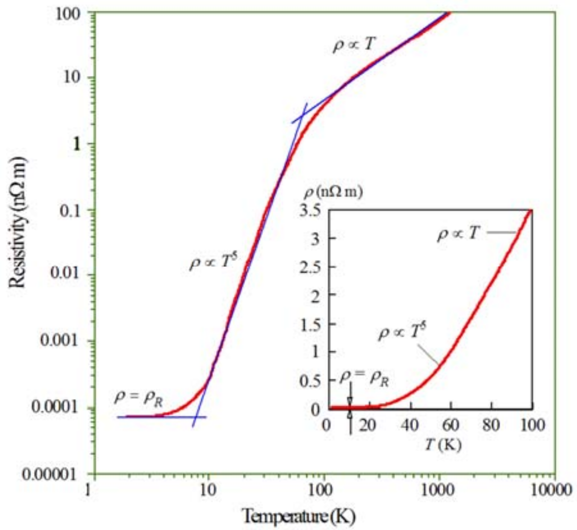
Ειδική αντίσταση των καθαρών μετάλλων

Υπενθύμιση:
Ιδανικές τιμές
$a_0 = 1/273K$
$n = 1$

	Metal	ρ_0 (nΩ m)	$\alpha_0\left(\frac{1}{K}\right)$	n	Comment
	Aluminum, Al	25.0	$\frac{1}{233}$		
Αποτυχία	Antimony, Sb	38	$\frac{1}{196}$		
	Copper, Cu	15.7	$\frac{1}{232}$	1.15	
	Gold, Au	22.8	$\frac{1}{251}$		
Αποτυχία	Indium, In	78.0	$\frac{1}{196}$		
	Platinum, Pt	98	$\frac{1}{255}$	0.94	
	Silver, Ag	14.6	$\frac{1}{244}$	1.11	
	Tantalum, Ta	117	$\frac{1}{294}$	0.93	
	Tin, Sn	110	$\frac{1}{217}$	1.11	
	Tungsten, W	50	$\frac{1}{202}$	1.20	
Αποτυχία	Iron, Fe	84.0	$\frac{1}{152}$	1.80	Magnetic metal; $273 < T < 1043$ K
Αποτυχία	Nickel, Ni	59.0	$\frac{1}{125}$	1.72	Magnetic metal; $273 < T < 627$ K

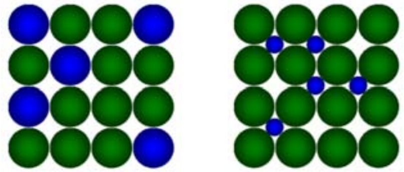
Ειδική αντίσταση των καθαρών μετάλλων

Ειδική αντίσταση του χαλκού



Κανόνας του Nordheim για στερεά διαλύματα

Στερεό διάλυμα



$\rho_I = Ac(1-c)$

Κανόνας του Nordheim για στερεά διαλύματα

Όπου:

A σταθερά του Nordheim

c περιεκτικότητα $(0 < c < 1)$

Παραδοχή:

Η κραμάτωση δεν μεταβάλλει σημαντικά τον αριθμό των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας ανά άτομο.

Παράδειγμα #9

Ποια είναι η ειδική αντίσταση του αλουμινίου στους 35^{o}C;

Δεδομένα:

$T = 35^o C = (273+35)K = 308K$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\rho = \rho_0[1 + a_0(T - T_0)]$$

Χρειαζόμαστε τα ρ_0, a_0, T_0

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\rho = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^n$$

Χρειάζομαστε τα ρ_0, T_0, n

Δεδομένα για $T_0 = 273K$

Metal	ρ_0 (nΩ m)	$\alpha_0\left(\frac{1}{K}\right)$	n
Aluminum, Al	25.0	$\frac{1}{233}$	
Antimony, Sb	38	$\frac{1}{196}$	
Copper, Cu	15.7	$\frac{1}{232}$	1.15

Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$\rho = \rho_0[1 + a_0(T - T_0)]$$

Αντικαθιστούμε:

$$\rho = (25.0\ n\Omega m)\left[1 + \frac{1}{233K}(308K - 273K)\right] =$$

$28.8\ n\Omega m$

Παράδειγμα #10

Σε ποια θερμοκρασία η ειδική αντίσταση του χρυσού αυξάνεται κατά 25% σε σχέση με την ειδική αντίσταση στους 27^{o}C ;

Δεδομένα:

$T_1 = 27^o C = (273+27)K = 300K$

$p = 0.25$

Για την ειδική αντίσταση θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$\rho = \rho_0[1 + a_0(T - T_0)]$

Το ποσοστό μεταβολής είναι (ονομάζουμε ρ_1 την ειδική αντίσταση σε T_1):

$$p = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_0[1 + a_0(T - T_0)] - \rho_0[1 + a_0(T_1 - T_0)]}{\rho_0[1 + a_0(T_1 - T_0)]} \Rightarrow$$

$$p = a_0\frac{T - T_1}{1 + a_0(T_1 - T_0)} \Rightarrow \quad T = T_1 + \frac{p}{a_0}[1 + a_0(T_1 - T_0)]$$

Χρειαζόμαστε τα a_0, T_0

Παράδειγμα #10

Metal	ρ_0 (nΩ m)	$\alpha_0\left(\frac{1}{K}\right)$	n
Aluminum, Al	25.0	$\frac{1}{233}$	
Antimony, Sb	38	$\frac{1}{196}$	
Copper, Cu	15.7	$\frac{1}{232}$	1.15
Gold, Au	22.8	$\frac{1}{251}$	

$$T_0 = 273K$$
$$a_0 = \frac{1}{251K}$$

Αντικαθιστούμε:

$$T = T_1 + \frac{p}{a_0}[1 + a_0(T_1 - T_0)] =$$

$$300K + \frac{0.25}{\left(\frac{1}{251K}\right)}\left[1 + \left(\frac{1}{251K}\right)(300K - 273K)\right] =$$

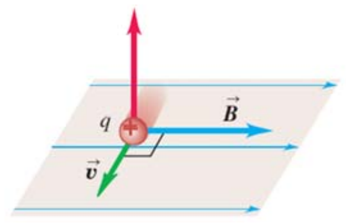
$370K$

Το φαινόμενο Hall

Υπενθύμιση: Δύναμη Lorentz

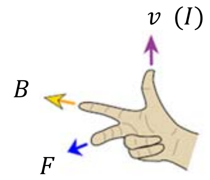
Φορτίο q που κινείται εντός μαγνητικού πεδίου B δέχεται δύναμη:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Η δύναμη είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec{v}$ και $\vec{B}$.

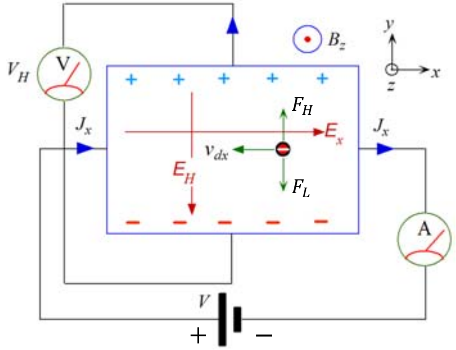
Η φορά της δύναμης προσδιορίζεται με τον "κανόνα του δεξιού χεριού".



Προσοχή: Η φορά κίνησης αφορά θετικά φορτία.

Το φαινόμενο Hall

Διάταξη φαινομένου Hall



J_x	Πυκνότητα ρεύματος.
E_x	Ηλεκτρικό πεδίο.
B_z	Μαγνητικό πεδίο.
v_{dx}	Ταχύτητα ολίσθησης ηλεκτρονίων.
E_H	Ηλεκτρικό πεδίο Hall.
F_L	Δύναμη Lorentz.
F_H	Δύναμη λόγω πεδίου Hall.
l_y	Διάσταση δείγματος στη διεύθυνση y (δεν δείχνεται στο σχήμα).
l_z	Διάσταση δείγματος στη διεύθυνση z (στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου – δεν σημειώνεται στο σχήμα).

Το φαινόμενο Hall

Η δύναμη Lorentz

$$F_L = ev_{dx}B_z$$

ωθεί τα ηλεκτρόνια στο κάτω μέρος της διάταξης.

Δημιουργείται συσσώρευση αρνητικών φορτίων στο κάτω τμήμα και θετικών φορτίων στο πάνω τμήμα.

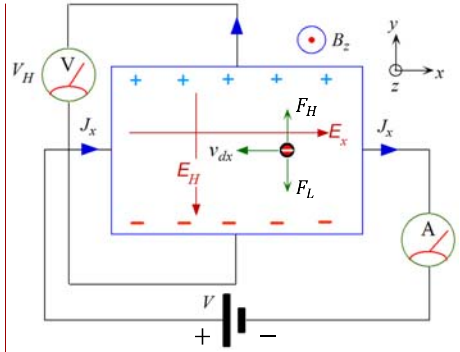
Αναπτύσσεται το ηλεκτρικό πεδίο Hall E_H

Λόγω του πεδίου Hall ασκείται μια αντίθετη δύναμη στα ηλεκτρόνια:

$$F_H = eE_H$$

Η συσσώρευση σταματά όταν

$$F_H = F_L \;\Rightarrow$$



$$eE_H = ev_{dx}B_z \;\Rightarrow$$
$$E_H = v_{dx}B_z$$

Το φαινόμενο Hall

Όμως γνωρίζουμε ότι:

$$J_x = env_{dx} \Rightarrow$$

$$v_{dx} = \frac{J_x}{en}$$

Το πεδίο Hall γράφεται:

$$E_H = v_{dx}B_z \Rightarrow$$

$$E_H = \frac{J_x B_z}{en} \qquad (1)$$

Ορίζουμε το συντελεστή Hall:

$$R_H = \frac{E_H}{J_x B_z}$$

Αντικαθιστώντας από τη σχέση (1)

$$R_H = -\frac{1}{en}$$

Βάζουμε το αρνητικό πρόσημο αφού το πεδίο E_H είναι αντίθετο με τον άξονα y.

Ο συντελεστής Hall δείχνει την ένταση του πεδίου Hall ανά μονάδα πυκνότητας ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό και ανά μονάδα του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου.

Μονάδες του συντελεστή Hall (SI):

$$\frac{m^3}{C} \text{ ή } \frac{m^3}{As}$$

Metal	R_H (Experimental) $[\mathrm{m^3\,A^{-1}\,s^{-1}}]$ $(\times 10^{-11})$
Ag	−9.0
Al	−3.5
Au	−7.2
Be	+3.4

Το φαινόμενο Hall

Τάση Hall

$$E_H = \frac{V_H}{l_y} \Rightarrow V_H = E_H l_y \Rightarrow$$

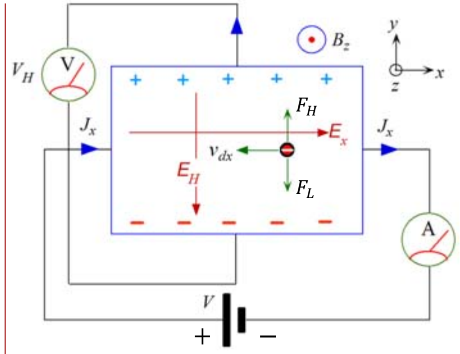
$$V_H = \frac{J_x B_z}{en} l_y$$

Η διατομή του δείγματος είναι $l_z l_y$

$$V_H = \frac{1}{en}\frac{I_x}{l_z l_y} B_z l_y \Rightarrow$$

$$V_H = -R_H \frac{I_x B_z}{l_z}$$

Εφαρμόζοντας ένα μαγνητικό πεδίο και μετρώντας την τάση V_H για διάφορες τιμές του ρεύματος I_x μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων n και το συντελεστή R_H.



Το φαινόμενο Hall

Ευκινησία (κινητικότητα) Hall

Ξέρουμε ότι η αγωγιμότητα είναι

$$\sigma = en\mu_e \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{1}{|R_H|}\mu_e \Rightarrow$$

$$\mu_e = \sigma|R_H|$$

Ευκινησία Hall

Χρησιμοποιώντας την ειδική αντίσταση:

$$\mu_e = \frac{1}{\rho}|R_H|$$

Γνωρίζοντας το συντελεστή Hall και μετρώντας την ειδική αντίσταση μπορούμε να προσδιορίσουμε την ευκινησία των ηλεκτρονίων.

Παράδειγμα #11

Σε πείραμα του φαινομένου Hall εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο 450 mT σε δείγμα Cu πάχους 1 mm στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Το ρεύμα που διαρρέει το δείγμα είναι 140 mA και η μετρούμενη τάση Hall είναι 4.7x10^{-9} V. Ποια είναι η συγκέντρωση ελεύθερων ηλεκτρονίων στον χαλκό ;

Δεδομένα:

$B_z = 0.45\ T$

$l_z = 0.001\ m$

$I_x = 0.14\ A$

$V_H = 4.7 \times 10^{-9}\ V$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$V_H = \frac{1}{en}\frac{I_x B_z}{l_z} \Rightarrow$$

$$n = \frac{I_x B_z}{V_H e\, l_z}$$

Χρειαζόμαστε:

$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

Αντικαθιστούμε:

$$n = \frac{(0.14A)(0.45T)}{(4.7 \times 10^{-9}V)(1.6 \times 10^{-19}C)(0.001m)} =$$

$8.4 \times 10^{28}\ m^{-3}$

Παράδειγμα #12

Στο προηγούμενο πείραμα η ειδική αντίσταση του δείγματος ήταν 1.85x10^{-8} Ω m. Ποια είναι η ευκινησία των ηλεκτρονίων ;

Δεδομένα:

$\rho = 1.85 \times 10^{-8}\ \Omega\, m$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\mu_e = \frac{|R_H|}{\rho}$$

Ο συντελεστής Hall είναι (απόλυτη τιμή):

$$|R_H| = \frac{1}{en}$$

Συνεπώς:

$$\mu_e = \frac{1}{en\rho}$$

Χρειαζόμαστε:

$e = 1.6 \times 10^{-19} C$

Έχουμε βρει στο προηγούμενο παράδειγμα:

$n = 8.4 \times 10^{28}\ m^{-3}$

Παράδειγμα #12

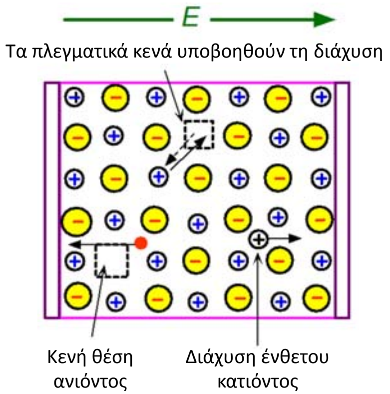
Αντικαθιστούμε:

$$\mu_e = \frac{1}{en\rho} =$$

$$\frac{1}{(1.6 \times 10^{-19} C)(8.4 \times 10^{28}\ m^{-3})(1.85 \times 10^{-8}\ \Omega\, m)} =$$

$$0.004 \frac{m^2}{V\, s}$$

Ιοντική αγωγιμότητα



Στα ιοντικά υλικά, επιπλέον από την ηλεκτρονιακή αγωγή μπορεί να έχουμε κίνηση φορτισμένων ιόντων με πολλούς διαφορετικούς μηχανισμούς.

- Όλα τα στερά έχουν πλεγματικά κενά και ένθετα άτομα.
- Ένα θετικό ιόν υπό την επίδραση της δύναμης λόγω του ηλεκτρικού πεδίου διαχέεται σε διπλανή θέση κινούμενο προς τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου.
- Αρνητικά ιόντα κινούνται με φορά αντίθετη του πεδίου.
- Η αγωγιμότητα σ εξαρτάται από όλους τους ξεχωριστούς μηχανισμούς και καθένας έχει τη δική του συνεισφορά:

$$\sigma = \sum q_i n_i \mu_i$$

Ολική αγωγιμότητα σε ιοντικό υλικό

Ιοντική αγωγιμότητα

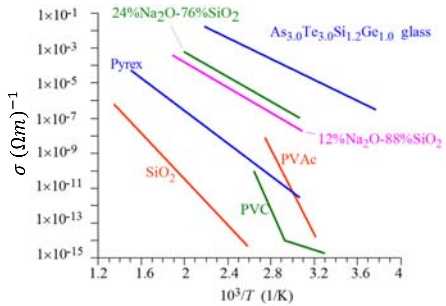
Εξάρτηση της ιοντικής αγωγιμότητας από τη θερμοκρασία

Για πολλά ιοντικά υλικά η αγωγιμότητα **ενεργοποιείται** από τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T}}$$

E_σ ενέργεια ενεργοποίησης αγωγιμότητας

Αν σχεδιάσουμε την αγωγιμότητα σ σε λογαριθμική κλίμακα σαν συνάρτηση του $1/T$ παίρνουμε μια ευθεία. Η κλίσης της ευθείας είναι $-E_\sigma/k_B$



Παράδειγμα: Το κοινό γυαλί σε θερμοκρασίες ~400^{o}C γίνεται αγωγός.

Παράδειγμα #13

a. Ποια είναι η ενέργεια ενεργοποίησης γυαλιού με αγωγιμότητα 10^{-6} (Ω m)$^{-1}$ στους 380 K και 10^{-4} (Ω m)$^{-1}$ στους 480 K;
b. Ποια είναι η αγωγιμότητα αυτού του γυαλιού στους 580 K ;

Δεδομένα:

$\sigma_1 = 10^{-6}(\Omega\, m)^{-1}$

$T_1 = 380K$

$\sigma_2 = 10^{-4}(\Omega\, m)^{-1}$

$T_2 = 480K$

Θα τη εφαρμόσουμε τη σχέση

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T}}$$

για τις δύο θερμοκρασίες:

$$\sigma_1 = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_1}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_2}}$$

Σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

Διαιρούμε κατά μέλη:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_1}}}{e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_2}}} =$$

$$e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_1}+\frac{E_\sigma}{k_B T_2}} =$$

$$e^{-\frac{E_\sigma}{k_B}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)}$$

Παίρνουμε λογαρίθμους στα δύο μέλη:

$$\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{E_\sigma}{k_B}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)$$

Παράδειγμα #13

Λύνουμε ως προς E_σ

$$\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{E_\sigma}{k_B}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right) \Rightarrow$$

$$E_\sigma = -k_B\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Χρειαζόμαστε:

$$k_B = 8.62\times 10^{-5}\,\frac{eV}{K}$$

Αντικαθιστούμε:

$$E_\sigma = -\left(8.62\times 10^{-5}\,\frac{eV}{K}\right)\frac{(380K)(480K)}{480K-380K}\ln\frac{10^{-6}(\Omega\, m)^{-1}}{10^{-4}(\Omega\, m)^{-1}} =$$

$0.724\ eV$

Παράδειγμα #13

b. Ποια είναι η αγωγιμότητα αυτού του γυαλιού στους 580K ;

Θα τη εφαρμόσουμε τη σχέση

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T}}$$

Πρέπει όμως να γνωρίζουμε το σ_0

Επιστρέφουμε στην αρχική σχέση

$$\sigma_1 = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_1}}$$

Και λύνουμε ως προς σ_0

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1}{e^{-\frac{E_\sigma}{k_B T_1}}} \Rightarrow$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 e^{\frac{E_\sigma}{k_B T_1}}$$

Αντικαθιστούμε:

$$\sigma_0 = 10^{-6}(\Omega m)^{-1} e^{-\frac{0.724eV}{\left(8.62\times 10^{-5}\frac{eV}{K}\right)(380K)}} =$$

$3970\ (\Omega m)^{-1}$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την αγωγιμότητα στους 580K

$$\sigma = 3970\ (\Omega m)^{-1} e^{-\frac{0.72eV}{\left(8.62\times 10^{-5}\frac{eV}{K}\right)(580K)}} =$$

$2.2\times 10^{-3}\ (\Omega m)^{-1}$